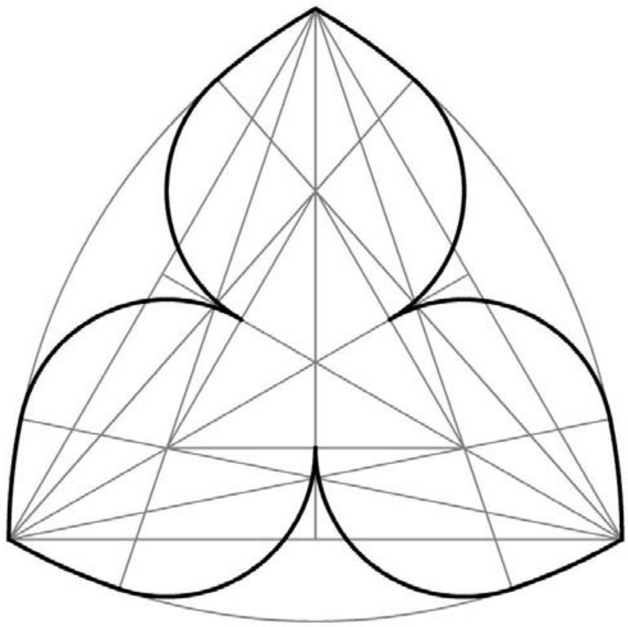
GOTICKÝ TROJLÍSTOK

Tému možno rozdeliť na štyri časti so stále sa zvyšujúcou náročnosťou:

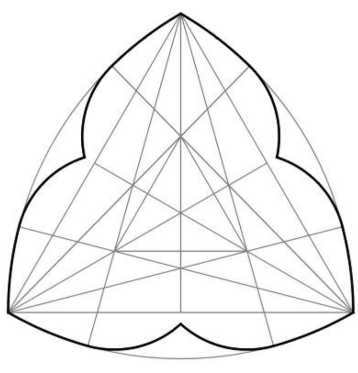
- *Úlohy 1 a 2, ktorých hlavný cieľ je pochopenie návodu.*
- *Úloha 3, ktorá je jednoduchou analýzou daného návodu. S celou triedou odporúčame túto úlohu riešiť len v prípade, že žiakov ešte zaujala úloha 2.*
- *Úlohy 4 a 5, ktoré odporúčame použiť ako podnety pre lepších žiakov na samostatnú prácu doma. Ak to celková úroveň triedy umožňuje (napr. v triedach s rozšíreným vyučovaním matematiky), možno ich skúsiť riešiť v triede skupinovo alebo spoločne.*
- *Úlohy 6 a 7, určené pre žiakov s hlbším záujmom o matematiku, môžu slúžiť aj ako príprava na matematickú olympiádu alebo podobné súťaže. Ich riešenie s celou triedou môže byť kontraproduktívne, u slabších žiakov by mohlo skôr posilniť odpor k matematike.*

1. Narysovaný obrázok by mal obsahovať všetky pomocné čiary (bez narysovania pomocnej čiary totiž nie je možné s dostatočnou presnosťou zistiť miesto napojenia jedného kružnicového oblúka na druhý). Oblúky kružníc, ktorých stredy sú vo vrcholoch menšieho základného trojuholníka, by mali byť „dotiahnuté“ až po stred strany menšieho trojuholníka (časť žiakov ich možno „dotiahne“ len po priesečník pomocných čiar, ktorý leží blízko stredu strany pomocného trojuholníka).

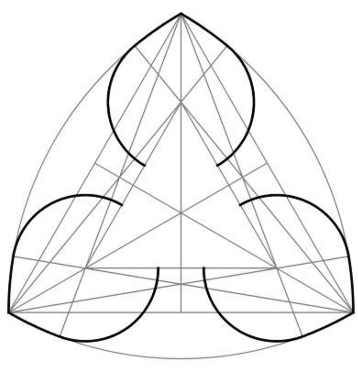


obr. 13

2. Ak vnútorný trojuholník zmenšíme, **tak dostaneme „tlstejší“ trojlístok** (pozri obr. 14). Ak vnútorný trojuholník zväčšíme, **jednotlivé lístky sa vôbec nespoja** (pozri obr. 15).

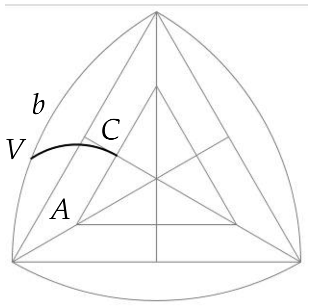


obr. 14

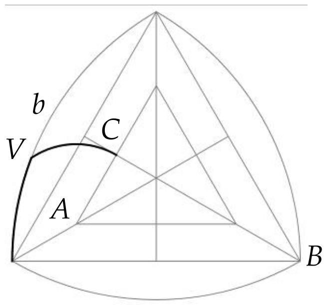


obr. 15

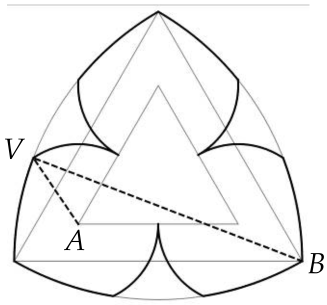
Poznámka. Je možné, že pre zväčšený vnútorný trojuholník navrhnú niektorí žiaci odlišný postup konštrukcie (pri ktorom sa čiary ohraničujúce susedné lístky spoja v strede strany menšieho trojuholníka). Najprv narysujú oblúk kružnice so stredom A od bodu C (stred strany menšieho trojuholníka) po bod V (priesečník s oblúkom b, obr. 16). Potom narysujú časť oblúka b (so stredom B) od bodu V po vrchol väčšieho trojuholníka (obr. 17). Nedostatok tejto konštrukcie je v tom, že uvedené dva oblúky na seba nenadväzujú hladko, v bode V vznikne hrot. Je to spôsobené tým, že body V, A, B neležia na jednej priamke (obr. 18, v pôvodnej konštrukcii body A, B, V ležia na jednej z pomocných čiar, pozri obrázky 5 až 7 a obr. 12). Preto v bode V prvý a druhý oblúk nemajú spoločnú dotyčnicu (dotyčnica k oblúku VC je kolmá na polomer AV, dotyčnica k druhému oblúku je kolmá na polomer BV). Diskusiu o tejto konštrukcii možno využiť na vysvetlenie významu pomocných čiar v pôvodnej konštrukcii.



obr. 16



obr. 17



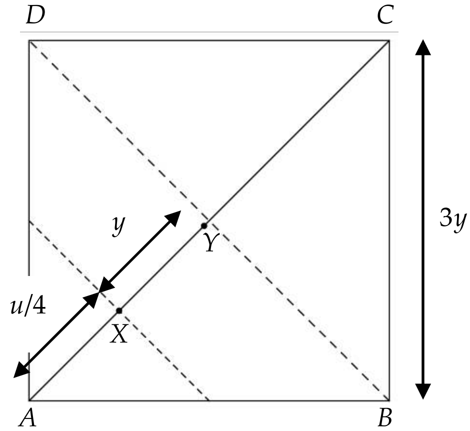
obr. 18

3. úsečka $\boldsymbol{AV}$

   V bode V sa spájajú dve kružnice tvoriace polovicu lístka. Druhá z týchto kružníc má stred A, preto AV je jej polomer. Táto kružnica prechádza stredom strany menšieho trojuholníka. Preto jej polomer (teda $|AV|$) sa rovná polovici dĺžky strany menšieho trojuholníka.

4. *Čo má urobiť Roman*: Zvolí za y dĺžku strany menšieho trojuholníka z obrázka 8 a podľa Tomášovho postupu skonštruuje úsečku AY. Potom skontroluje, či úsečka AY je rovnako dlhá ako strana väčšieho trojuholníka v obrázku 8.

   Poznámky :
   1. *Na viacerých miestach Tomášovej konštrukcie treba nanášať úsečku dĺžky y. Ideálne by preto bolo nemeniť počas konštrukcie roztvor kružidla. Učiteľ môže – ak to uzná za vhodné – podnietiť diskusiu, či je možné celú konštrukciu urobiť bez zmeny roztvoru kružidla (kružidlo môžeme potrebovať okrem nanášania úsečky dĺžky y ešte na delenie uhlopriečky AC; žiaci síce môžu nájsť štvrtinu dĺžky aj meraním, tento postup je však menej „štýlový"). Poznamenajme, že konštrukcie s nemeniacim sa roztvorom kružidla uprednostňovali práve stredovekí stavitelia chrámov.*
   2. *Pri presnom rysovaní zistíme, že bod Y leží veľmi blízko priesečníka uhlopriečok štvorca ABCD. To môže byť podnetom na diskusiu o približnej konštrukcii strany väčšieho trojuholníka (v ktorej za túto dĺžku zvolíme polovicu dĺžky uhlopriečky štvorca ABCD). Možné otázky do diskusie:*
      a) *numericky porovnať presnú a približnú dĺžku strany väčšieho trojuholníka* ($\frac{\sqrt{18}}{4}+1 \approx 2{,}06$, $\frac{3\cdot\sqrt{2}}{2} \approx 2{,}12$),
      b) *rozhodnúť, ktorý z dvoch prípadov spomínaných v texte pred úlohou 2 nastane v prípade, že namiesto presnej dĺžky zvolíme približnú hodnotu, a ako sa to prejaví na výslednom trojlístku (pri tom možno využiť výsledky riešenia úlohy 2),*
      c) *čo by sa stalo, keby sme za dĺžku strany väčšieho trojuholníka zvolili dvojnásobok dĺžky y.*



obr. 19

5. Na obrázku 19 je Tomášova konštrukcia. Dĺžku uhlopriečky AC sme označili u. Uhlopriečka štvorca so stranou $3y$ má dĺžku $u = \sqrt{2}\cdot 3y = \sqrt{18}\cdot y$,

vyplýva to z Pytagorovej vety:

$$u^2 = (3y)^2 + (3y)^2 .$$

Podľa konštrukcie sa

$$|AY| = \frac{u}{4} + y ,$$

po dosadení za u máme

$$|AY| = \frac{\sqrt{18} \cdot y}{4} + y = \left(\frac{\sqrt{18}}{4} + 1 \right) \cdot y \ .$$

6. Pre dĺžku strany BC platí: $|BC| = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} y + \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} a = \frac{\sqrt{3}}{3} \left(\frac{y}{2} + a \right)$.

   Podľa textu pred úlohou 6 sa $|BC| = |CS| + |SB|$. V rovnostrannom trojuholníku so stranou dĺžky x má ťažnica dĺžku $t = \frac{\sqrt{3}}{2} x$, vyplýva to z Pytagorovej vety:

$$t^2 = x^2 - \left(\frac{x}{2} \right)^2 , \quad \text{preto } |CS| = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} y , \quad |SB| = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} a .$$

   Odvodenie Svetlaninej rovnice: Do Pytagorovej vety

$$|AB|^2 = |AC|^2 + |BC|^2$$

   dosadíme $|AB| = a - \frac{y}{2}$, $|AC| = \frac{y}{2}$, $|BC| = \frac{\sqrt{3}}{3} \left(a + \frac{y}{2} \right)$ a upravujeme:

$$\left(a - \frac{y}{2} \right)^2 = \left(\frac{y}{2} \right)^2 + \left[\frac{\sqrt{3}}{3} \left(a + \frac{y}{2} \right) \right]^2 , \quad a^2 - ay + \frac{y^2}{4} = \frac{y^2}{4} + \frac{1}{3} \left(a^2 + ay + \frac{y^2}{4} \right) ,$$

$$12a^2 - 12ay = 4a^2 + 4ay + y^2 , \quad 8a^2 - 16ay - y^2 = 0 .$$

7. *Rovnica (**) je len inak zapísaná Svetlanina rovnica*: Umocnením a postupnými úpravami rovnice $8(a - y)^2 = 9y^2$ dostávame

$$8\left(a^2 - 2ay + y^2\right) = 9y^2 , \quad 8a^2 - 16ay + 8y^2 = 9y^2 , \quad 8a^2 - 16ay - y^2 = 0 .$$

   Posledná rovnica je pôvodná Svetlanina rovnica (*).

   Vyjadrenie čísla a pomocou čísla y: Po roznásobení postupne dostávame

$$a\sqrt{8} - y\sqrt{8} = 3y , \quad a\sqrt{8} = 3y + y\sqrt{8} , \quad a = \frac{3y + y\sqrt{8}}{\sqrt{8}} .$$

   Číslo a z predchádzajúceho výpočtu a Tomášova hodnota sú rovnaké: Treba skontrolovať rovnosť

$$\frac{3 + \sqrt{8}}{\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{18}}{4} + 1 ,$$

   To možno urobiť viacerými spôsobmi, napr.

   1. stačí dokázať rovnosť $\frac{3}{\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{18}}{4}$. Tú môžeme overiť umocnením obidvoch strán na druhú alebo prevodom na rovnosť $3 \cdot 4 = \sqrt{18} \cdot \sqrt{8}$, t.j. $12 = \sqrt{18 \cdot 8} = \sqrt{144}$,
   2. postupom obdobným úpravám rovnice. Obe strany najprv vynásobíme číslami $\sqrt{8}$ a 4, postupne dostaneme

$$4 \cdot \left(3 + \sqrt{8}\right) = \sqrt{8} \cdot \sqrt{18} + 4\sqrt{8} , \quad 12 + 4\sqrt{8} = \sqrt{8 \cdot 18} + 4\sqrt{8} , \quad 12 = \sqrt{144} ,$$

3. na kalkulačke vypočítať čísla na obidvoch stranách rovnosti (tento postup sa však nemusí vždy osvedčiť, nám napríklad na kalkulačke vyšiel ako rozdiel medzi pravou a ľavou stranou číslo -2,8725834830040787794990936644385e–38).

Poznámky:

1. *Pri odmocnení rovnice (**) sme využili, že čísla y, $a-y$ sú kladné. Nechceli sme túto skutočnosť zdôrazňovať v texte, aby sme neodvádzali pozornosť žiaka. Ak to učiteľ uzná za vhodné, môže o tomto kroku rozprúdiť diskusiu v triede.*
2. *Z rovnice (*) pred úlohou 7 možno a vyjadriť aj pomocou vzorca pre korene kvadratickej rovnice, predtým je však vhodné zapísať ju v tvare*

$$a^2 - 2ay - \frac{y^2}{8} = 0 . \qquad (***)$$

Koreňmi poslednej rovnice sú čísla

$$a_{1,2} = \frac{-(-2y) \pm \sqrt{(-2y)^2 - 4 \cdot \left(-\frac{y^2}{8}\right)}}{2} = \frac{2y \pm \sqrt{4y^2 + \frac{y^2}{2}}}{2} = y \pm \frac{\sqrt{\frac{9}{2}}}{2} y = y \pm \frac{3}{2\sqrt{2}} y = y \pm \frac{3}{\sqrt{8}} y,$$

z nich kladný je len koreň $a = y + \frac{3}{\sqrt{8}} y$.

Ak chce učiteľ pri riešení rovnice (**) použiť tento prístup, môže zvoliť postup pozostávajúci z týchto troch krokov:

1. *žiakom prezradí informáciu, že rovnica* $x^2 + Bx + C = 0$ *má korene*

$$x_1 = \frac{-B + \sqrt{B^2 - 4C}}{2} \quad a \quad x_2 = \frac{-B - \sqrt{B^2 - 4C}}{2} ,$$

2. *nechá žiakov nájsť korene kvadratických rovníc s postupne sa zvyšujúcou náročnosťou, napr.*

$$x^2 - 5x + 6 = 0 , \quad x^2 - x - 2 = 0 , \quad x^2 - x - 1 = 0 , \quad x^2 - 2x - \frac{1}{8} = 0 ,$$

3. *napokon žiakov nechá rozmýšľať, ako uvedený vzorec použiť pri riešení rovnice (***).*